

Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 6×6 Berpangkat Bilangan Bulat

Siti Rugayah¹, Daz Vholasky Anggraini², Mutiara Praptasari³, Theysa Sahlani Pratiwi⁴

^{1,2,3,4} Universitas Bina Sarana Informatika

correspondence e-mail*, siti.rgh@bsi.ac.id

Submitted:

Revised: 2025/01/01;

Accepted: 2025/02/11;

Published: 2025/03/11

Abstract

Suppose A_n^6 is a special symmetric matrix of order 6×6 with integer powers, where the entries are real number elements. To obtain the general form of the trace of the matrix A_n^6 by determining the general form of the matrix A_n^6 where the rank of the matrix is first sought from the power of two to eleven and the power of negative two to negative eleven. Then guess the general formula for the exponent of the matrix A_n^6 with positive integer powers which is proven by mathematical induction and with the same steps guess the formula for the exponent of the matrix A_n^6 with negative integer powers which will be proven by the matrix inverse rule. So that the result is obtained, namely the general form of the trace of the matrix A_n^6 and is proven by the definition of trace along with examples of applications of the trace matrix.

Keywords

Symmetric Matrix Trace, Integer Powers



© 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

PENDAHULUAN

Pembahasan mengenai aljabar linier dalam cabang ilmu matematika telah mengalami perkembangan yang sangat pesat yang digunakan di berbagai bidang. Salah satu cabang aljabar linier yang menarik untuk di bahas adalah matriks. Matriks memiliki peran penting dalam berbagai bidang ilmu seperti ilmu komputer, fisika, biologi dan masih banyak lagi. Secara umum matrik adalah susunan bilangan atau fungsi yang diletakkan atas baris dan kolom serta diapit oleh dua kurung siku. Salah satu jenis matriks yaitu, matriks simetris. Matriks ini merupakan matriks persegi yang unik dimana matriks asalnya sama dengan matriks hasil transposnya, Sehingga sangat menarik untuk di teliti.

Seperti diketahui bahwa matriks tidak terlepas dari pembahasan terkait operasi dari matriks seperti trace matriks berpangkat. Trace matriks merupakan penjumlahan elemen-elemen diagonal utama dari matriks persegi.¹ Pada perkembangannya, penelitian

¹ Anton H, Rorres C. Elementary Linier Algebra Versi: Applications Version, 11th Edition. United States of America. 2013.

terkait trace matriks telah dikaji oleh Pahade pada tahun 2015 dimana trace matriks yang dibahas berordo 2 dan entri-entrinya merupakan elemen bilangan real dengan pangkat bilangan bulat positif. Pada tahun 2018 Aryani dan yulianis membahas trace matriks dengan pangkat bilangan bulat negatif dilanjutkan dengan trace matriks segitiga dengan ordo 4 berpangkat bilangan bulat (Aryani & Yuda, 2020). dan ordo 5 berpangkat bilangan bulat.² Kemudian Aryani dkk, melanjutkan pengkajian trace matriks kompleks dengan ordo tiga berpangkat bilangan bulat pada tahun 2020. Kemudian Marzuki, dkk (2021) telah mengkaji Trace Matriks $n \times n$ Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif.

Disisi lain, Aryani, dkk (2021) telah mengembangkan rumus umum trace matriks yang berordo lebih besar yaitu pada matriks simetris berbentuk khusus ordo tiga berpangkat bilangan bulat, dilanjut trace matriks simetris berbentuk khusus ordo empat berpangkat bilangan bulat,³ trace matriks matriks simetris berbentuk khusus ordo empat berpangkat bilangan bulat dan trace matriks matriks simetris berbentuk khusus ordo lima berpangkat bilangan bulat.⁴ Sejauh ini, trace matriks berbentuk khusus ordo lima merupakan pengkajian trace matriks yang paling besar, sehingga hal ini memberikan motivasi untuk mengkaji trace matriks dengan orde yang lebih besar. Oleh karena itu pada artikel ini akan di kontruksi rumus umum trace matriks simetris berbentuk khusus ordo enam berpangkat bilangan bulat. Selain itu akan dibuktikan bentuk umum trace matriks simetris berbentuk khusus ordo enam berpangkat bilangan bulat dengan definisi trace. Lebih lanjut akan diberikan pengaplikasiannya dalam bentuk contoh soal.

METODE

Penelitian ini menggunakan studi literature dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Diberikan Matris berbentuk simetris dengan ordo 6×6 .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ a & 0 & a & a & a & a \\ a & a & 0 & a & a & a \\ a & a & a & 0 & a & a \\ a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

² Aryani F, Anam C, Marzuki CC. Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3 X 3 Berpangkat Bilangan Bulat. Jurnal Sains Matematika Dan Statistika. 2020: 6(1).

³ Aryani F, Alfianov SP, Marzuki CC, dan Rahma AN. Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat. SNTIKI 13. Pekanbaru. 2020: 13

⁴ Aryani F, Hartina, Muda Y dan Zukrianto. Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat. SNTIKI 13. Pekanbaru. 2020: 13

Menentukan perpangkatan Matriks A^2 sampai A^k dan perpangkatan A^{-2} sampai A^{-k} , dimana k merupakan batas atas ketika pola sudah terlihat.

Menentukan bentuk umum perpangkatan matriks A^n , dimana n bilangan bulat positif dan negatif.

Menentukan bentuk umum $\text{trace}(A^n)$, dengan n bilangan bulat positif dan negatif.

Membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks A^n , dengan n bilangan bulat positif dengan metode induksi matematika.

Mendapatkan invers dari matriks A_4 menggunakan metode adjoin.

Pembuktian rumus umum A^n , dengan n bilangan bulat negatif menggunakan aturan invers yaitu $A^{-n}A^n = A^nA^{-n} = I$.

Memberikan Contoh $\text{trace}(A^n)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penulisan pada bagian ini akan ditunjukkan trace matriks simetris 6×6 bentuk khusus berpangkatan bilangan bulat. Sebelumnya, akan diberikan konsep-konsep dari Matriks, matriks simetris, definisi perpangkatan matriks, invers matriks dan trace matriks.

Definisi 1. Matriks adalah susunan angka berbentuk persegi panjang. Angka-angka dalam susunan tersebut disebut entri-entri dalam matriks.

Definisi 2. Matriks persegi A dikatakan simetris jika $A = A^t$.

Definisi 3. Jika A adalah matriks persegi, maka definisi dari pangkat bilangan bulat tak negatif dari A adalah $A^0 = I$ dan $A^n = AA \dots A$ (n faktor), dimana $n > 0$, dan jika A adalah invertibel, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah $A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}$ (n faktor), dimana $n > 0$.

Definis 4. Jika A adalah matriks persegi, dan jika matriks B yang memiliki ukuran sama dapat didefinisikan sehingga $AB = BA = I$, maka matriks A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut invers dari matriks A . Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka matriks A dikatakan matriks singular.

Definisi 5. Jika A adalah matriks persegi, maka $\text{trace } A$ dinotasikan dengan $\text{tr}(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri pada diagonal utama A . $\text{Trace } A$ tidak dapat

didefinisikan jika A bukan matriks persegi.⁵

Prinsip Induksi Matematika

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan benar atau salah tapi tidak keduanya.

Jika (i) $P(1)$ benar dan

jika (ii) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ benar $\Rightarrow P(n+1)$ benar untuk $n \geq 1$, maka pernyataan $P(n)$ adalah benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.⁶

Bentuk Umum Matriks Simetris Berbentuk Khusus 6×6 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada bagian ini akan dikonstruksi bentuk umum dari matriks simetris 6×6 berpangkatan matriks A^2 sampai A^k . Sebelumnya, matriks simetris bentuk khusus 6×6 dinotasikan dengan A_6 , matriks simetris bentuk khusus 6×6 berpangkat bilangan bulat dinotasikan dengan A_6^n dan *trace* matriks simetris bentuk khusus 6×6 berpangkat bilangan bulat dinotasikan dengan $tr(A_6^n)$.

$$A_6^2 = \begin{bmatrix} 5a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 \\ 4a^2 & 5a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 \\ 4a^2 & 4a^2 & 5a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 \\ 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 5a^2 & 4a^2 & 4a^2 \\ 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 5a^2 & 4a^2 \\ 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 4a^2 & 5a^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$A_6^3 = \begin{bmatrix} 20a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 \\ 21a^3 & 20a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 \\ 21a^3 & 21a^3 & 20a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 \\ 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 20a^3 & 21a^3 & 21a^3 \\ 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 20a^3 & 21a^3 \\ 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 21a^3 & 20a^3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A_6^4 = \begin{bmatrix} 105a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 \\ 104a^4 & 105a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 \\ 104a^4 & 104a^4 & 105a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 \\ 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 105a^4 & 104a^4 & 104a^4 \\ 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 105a^4 & 104a^4 \\ 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 104a^4 & 105a^4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A_6^5 = \begin{bmatrix} 520a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 \\ 521a^5 & 520a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 \\ 521a^5 & 521a^5 & 520a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 \\ 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 520a^5 & 521a^5 & 521a^5 \\ 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 520a^5 & 521a^5 \\ 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 521a^5 & 520a^5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

⁵ Anton H, Rorres C. Elementary Linier Algebra Versi: Applications Version, 11th Edition. United States of America. 2013.

⁶ Charles E, Robert Jr. Introduction to Mathematical Proofs: A Transition to Advanced Mathematics, 2th Edition. USA. 2015.

$$A_6^6 = \begin{bmatrix} 2605a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 \\ 2604a^6 & 2605a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 \\ 2604a^6 & 2604a^6 & 2605a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 \\ 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2605a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 \\ 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2605a^6 & 2604a^6 \\ 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2604a^6 & 2605a^6 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$A_6^7 = \begin{bmatrix} 13020a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 \\ 13021a^7 & 13020a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 \\ 13021a^7 & 13021a^7 & 13020a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 \\ 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13020a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 \\ 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13020a^7 & 13021a^7 \\ 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13021a^7 & 13020a^7 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A_6^8 = \begin{bmatrix} 65105a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 \\ 65104a^8 & 65105a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 \\ 65104a^8 & 65104a^8 & 65105a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 \\ 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65105a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 \\ 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65105a^8 & 65104a^8 \\ 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65104a^8 & 65105a^8 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$A_6^9 = \begin{bmatrix} 325520a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 \\ 325521a^9 & 325520a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 \\ 325521a^9 & 325521a^9 & 325520a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 \\ 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325520a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 \\ 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325520a^9 & 325521a^9 \\ 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325521a^9 & 325520a^9 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$A_6^{10} = \begin{bmatrix} 1627605a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} \\ 1627604a^{10} & 1627605a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} \\ 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627605a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} \\ 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627605a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} \\ 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627605a^{10} & 1627604a^{10} \\ 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627604a^{10} & 1627605a^{10} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$A_6^{11} = \begin{bmatrix} 8138020a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} \\ 8138021a^{11} & 8138020a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} \\ 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138020a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} \\ 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138020a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} \\ 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138020a^{11} & 8138021a^{11} \\ 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138021a^{11} & 8138020a^{11} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dari persamaan (2) sampai (11) dapat terlihat pola yang terbentuk dari elemen-elemen matriksnya, maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks sebagai berikut:

Teorema 1.

$$A_6^n = \begin{bmatrix} \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n \end{bmatrix}$$

(12)

Bukti. Pembuktian dilakukan menggunakan induksi matematika.

1. Akan ditunjukkan (1) benar.

$$p(1): A_6^1 = \begin{bmatrix} \frac{5^1 - (-1)^{1+1.5}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 \\ \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 - (-1)^{1+1.5}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 \\ \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 - (-1)^{1+1.5}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 \\ \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 - (-1)^{1+1.5}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 \\ \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 - (-1)^{1+1.5}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 \\ \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 + (-1)^{1+1}}{6} a^1 & \frac{5^1 - (-1)^{1+1.5}}{6} a^1 \end{bmatrix}$$

$$A_6^1 = \begin{bmatrix} \frac{5-5}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 \\ \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5-5}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 \\ \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5-5}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 \\ \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5-5}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 \\ \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5-5}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 \\ \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5+1}{6} a^1 & \frac{5-5}{6} a^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 \\ \frac{6}{6} a^1 & \frac{0}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 \\ \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{0}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 \\ \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{0}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 \\ \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{0}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 \\ \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{6}{6} a^1 & \frac{0}{6} a^1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ a & 0 & a & a & a & a \\ a & a & 0 & a & a & a \\ a & a & a & 0 & a & a \\ a & a & a & a & 0 & a \\ a & a & a & a & a & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (1) maka $p(1)$ benar.

2. Selanjutnya, asumsikan (k) benar, yaitu:

$$p(k): A_6^k = \begin{bmatrix} \frac{5^k - (-1)^{k+1.5}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k \\ \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k - (-1)^{k+1.5}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k \\ \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k - (-1)^{k+1.5}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k \\ \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k - (-1)^{k+1.5}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k \\ \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k - (-1)^{k+1.5}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k \\ \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k + (-1)^{k+1}}{6} a^k & \frac{5^k - (-1)^{k+1.5}}{6} a^k \end{bmatrix},$$

untuk k bilangan bulat positif.

Akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar yaitu:

$$p(k+1): A_6^{k+1} =$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{5^{k+1}-(-1)^{k+2}.5}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} \\
 \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}-(-1)^{k+2}.5}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} \\
 \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}-(-1)^{k+2}.5}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} \\
 \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}-(-1)^{k+2}.5}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} \\
 \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}-(-1)^{k+2}.5}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} \\
 \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1} & \frac{5^{k+1}-(-1)^{k+2}.5}{6}a^{k+1}
 \end{bmatrix}$$

(13)

Bukti:

Akan dibuktikan $A_6^{k+1} = A_6^k \cdot A_6$

$$A_6^k = \begin{bmatrix}
 \frac{5^k-(-1)^{k+1}.5}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k \\
 \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k-(-1)^{k+1}.5}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k \\
 \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k-(-1)^{k+1}.5}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k \\
 \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k-(-1)^{k+1}.5}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k \\
 \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k-(-1)^{k+1}.5}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k \\
 \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k & \frac{5^k-(-1)^{k+1}.5}{6}a^k
 \end{bmatrix}$$

dan $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ a & 0 & a & a & a & a \\ a & a & 0 & a & a & a \\ a & a & a & 0 & a & a \\ a & a & a & a & 0 & a \\ a & a & a & a & a & 0 \end{bmatrix}$

Dari perkalian matriks A_6^k dan A_6 didapat entri-entri sebagai berikut:

Perhatikan bahwa $A_6^{k+1} = A_6^k \cdot A_6 = [a_{ij}]$

untuk $i = j$

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= \frac{5^k-(-1)^{k+1}.5}{6}a^k(0) + 5 \left(\frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k(a) \right) = \frac{5^k-(-1)(-1)^{k+1}.5}{6}a^k(a) \\
 &= \frac{5^{k+1}-(-1)^{k+2}.5}{6}a^{k+1}
 \end{aligned}$$

Untuk $i \neq j$

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= \frac{5^k-(-1)^{k+1}.5}{6}a^k(a) + \frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k(0) + 4 \left(\frac{5^k+(-1)^{k+1}}{6}a^k(a) \right) = \frac{5^k-(-1)^{k+1}.5+4.5^k+4(-1)^{k+1}}{6}a^{k+1} = \\
 &= \frac{5^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{6}a^{k+1} \\
 a_{ij} &= \frac{5^{k+1}+(-1)^{k+2}}{6}a^{k+1}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan perkalian entri-entri matriks tersebut maka di dapat entri-entri yang lain yang dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$A_6^n = [a_{ij}] = \begin{cases} \frac{5^{k+1} - (-1)^{k+2.5}}{6} a^{k+1} \\ \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} \end{cases}$$

Dapat juga ditulis dalam bentuk matriks

$$A_6^n = \begin{bmatrix} \frac{5^{k+1} - (-1)^{k+2.5}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} \\ \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} - (-1)^{k+2.5}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} \\ \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} - (-1)^{k+2.5}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} \\ \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} - (-1)^{k+2.5}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} \\ \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} - (-1)^{k+2.5}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} \\ \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} + (-1)^{k+2}}{6} a^{k+1} & \frac{5^{k+1} - (-1)^{k+2.5}}{6} a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Dengan melihat persamaan (12) maka $p(k+1)$ benar. Karena langkah (1) dan (2) juga benar, maka terbukti untuk n bilangan bulat positif.

Trace Matriks Simetris berbentuk khusus 6×6 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Akan ditunjukkan bentuk umum dari *trace* matriks simetris bentuk khusus 6×6 berpangkat bilangan bulat positif dan dibuktikan secara langsung menggunakan definisi *trace* matriks.

Teorema 2

Diberikan matriks simetris bentuk khusus 6×6 sebagai berikut :

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ a & 0 & a & a & a & a \\ a & a & 0 & a & a & a \\ a & a & a & 0 & a & a \\ a & a & a & a & 0 & a \\ a & a & a & a & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0,$$

maka $tr(A_6^n) = (5^n - (-1)^{n+1.5})a^n$, dengan n bilangan bulat.

Bukti:

Pembuktian menggunakan definisi *trace* matriks. Berdasarkan Teorema 1, maka *trace* matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$tr(A_6^n) = tr \begin{bmatrix} \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n & \frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n \end{bmatrix}$$

$$tr(A_6^n) = \left(\frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n\right) + \left(\frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n\right) + \left(\frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n\right) + \left(\frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n\right) + \left(\frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n\right) + \left(\frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n\right)$$

$tr(A_6^n) = 6 \left(\frac{5^n - (-1)^{n+1.5}}{6} a^n\right) = (5^n - (-1)^{n+1.5})a^n$, dengan n bilangan bulat positif. Sehingga teorema 2 Terbukti.

Bentuk Umum Matriks Simetris Berbentuk Khusus 6x6 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Pada bagian ini akan dikonstruksi bentuk umum dari matriks simetris 6×6 berpangkatan matriks A^{-2} sampai A^{-k} , berdasarkan aturan perpangkatan dan invers pada matriks.

$$A_6^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5a & 5a & 5a & 5a & 5a & 5a \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5a & 5a & 5a & 5a & 5a & 5a \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 5a & 5a & 5a & 5a & 5a & 5a \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 5a & 5a & 5a & 5a & 5a & 5a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 5a & 5a & 5a & 5a & 5a & 5a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 5a & 5a & 5a & 5a & 5a & 5a \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$A_6^{-2} = \begin{bmatrix} 21 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 \\ -4 & 21 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 \\ -4 & -4 & 21 & -4 & -4 & -4 \\ 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 \\ -4 & -4 & -4 & 21 & -4 & -4 \\ 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & 21 & -4 \\ 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 21 \\ 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 & 25a^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

[illegible]

$$A_6^{-4} = \begin{bmatrix} 521 & -104 & -104 & -104 & -104 & -104 \\ 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 \\ -104 & 521 & -104 & -104 & -104 & -104 \\ 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 \\ -104 & -104 & 521 & -104 & -104 & -104 \\ 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 \\ -104 & -104 & -104 & 521 & -104 & -104 \\ 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 \\ -104 & -104 & -104 & -104 & 521 & -104 \\ 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 \\ -104 & -104 & -104 & -104 & -104 & 521 \\ 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 & 625a^4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

[illegible]

[illegible]

$$A_6^{-7} = \begin{bmatrix} -\frac{65104}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} \\ \frac{13021}{78125a^7} & -\frac{65104}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} \\ \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & -\frac{65104}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} \\ \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & -\frac{65104}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} \\ \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & -\frac{65104}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} \\ \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & \frac{13021}{78125a^7} & -\frac{65104}{78125a^7} \end{bmatrix} \quad (20)$$

[illegible]

$$A_6^{-9} = \begin{bmatrix} \frac{-1627604}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} \\ \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{-1627604}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} \\ \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{-1627604}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} \\ \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{-1627604}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} \\ \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{-1627604}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} \\ \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{325521}{1953125a^9} & \frac{-1627604}{1953125a^9} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$A_6^{-10} = \begin{bmatrix} \frac{8138021}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} \\ \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{8138021}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} \\ \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{8138021}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} \\ \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{8138021}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} \\ \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{8138021}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} \\ \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{-1627604}{9765625a^{10}} & \frac{8138021}{9765625a^{10}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$A_6^{-11} = \begin{bmatrix} \frac{-40690104}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} \\ \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{-40690104}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} \\ \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{-40690104}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} \\ \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{-40690104}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} \\ \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{-40690104}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} \\ \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{8138021}{48828125a^{11}} & \frac{-40690104}{48828125a^{11}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Dari persamaan (14) sampai (24) dapat terlihat pola yang terbentuk dari elemen-elemen matriksnya, maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks A^{-2} sampai A^{-k} pada teorema 3.

Teorema 3. Diberikan matriks simetris 6×6 dengan bentuk khusus

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ a & 0 & a & a & a & a \\ a & a & 0 & a & a & a \\ a & a & a & 0 & a & a \\ a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0,$$

sehingga diperoleh bentuk umum matriks A^{-2} sampai A^{-k}

$$A_6^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} \end{bmatrix} \quad (25)$$

dapat juga ditulis

$$A_6^{-n} = [b_{ij}] = \begin{cases} \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n}, & \text{untuk } i = j \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n}, & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Bukti:

Akan dibuktikan persamaan (25) menggunakan aturan invers sebagai berikut:

$$A_6^n A_6^{-n} = A_6^{-n} A_6^n = I \rightarrow A_6^n A_6^{-n} = I$$

$$A_6^n A_6^{-n} = [c_{ij}]$$

Karena matriks terlalu besar maka, dimisalkan entri-entri matriks dengan symbol sebagai berikut:

$$A_6^n = [a_{ij}] = \begin{cases} \frac{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 5}{6} a^n = x_1, & \text{untuk } i = j \\ \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n = y_1, & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

$$A_6^{-n} = [b_{ij}] = \begin{cases} \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} = x_2, & \text{untuk } i = j \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n} = y_2, & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

$$A^n A^{-n} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & y_1 & y_1 & y_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 & y_1 & y_1 & y_1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & x_1 & y_1 & y_1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_1 & x_1 & y_1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_1 & y_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_1 & y_1 & y_1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & y_2 & y_2 & y_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 & y_2 & y_2 & y_2 & y_2 \\ y_2 & y_2 & x_2 & y_2 & y_2 & y_2 \\ y_2 & y_2 & y_2 & x_2 & y_2 & y_2 \\ y_2 & y_2 & y_2 & y_2 & x_2 & y_2 \\ y_2 & y_2 & y_2 & y_2 & y_2 & x_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga di peroleh hasil perkalian dua matriks A_6^n dan A_6^{-n} sebagai berikut:

Untuk $i = j$, diperoleh persamaan berikut:

$$c_{11} = x_1 + 5(y_1)$$

(26)

Subtitusikan $x_1 = \frac{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 5}{6} a^n$, $y_1 = \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n$, $x_2 = \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n}$, $y_2 = \frac{(-1)^{n+1} 5^n + 1}{6.5^n a^n}$ ke

persamaan (26). Sehingga di dapat:

$$c_{11} = \left(\left(\frac{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 5}{6} a^n \right) \left(\frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6 \cdot 5^n a^n} \right) \right) + 5 \left(\left(\frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \right) \left(\frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6 \cdot 5^n a^n} \right) \right)$$

$$c_{11} = \frac{((-1)^n 5^{2n+1} + 5^n - (-1)^{2n+1} 5^{n+2}) - (-1)^{n+1} 5 + (-1)^{n+1} 5^{2n+1} + 5^{n+1} + (-1)^{2n+2} 5^{n+1} + (-1)^{n+1} 5}{6^2 5^n}$$

Jika diberikan n genap maka:

$$= \left(\frac{5^{2n+1} + 5^n + 5^{2n+2} + 5 - 5^{2n+1} + 5^{n+1} + 5^{n+1} - 5}{6^2 5^n} \right) = \left(\frac{5^n (1 + 5^2 + 5 + 5)}{6^2 5^n} \right) = \frac{36}{36} = 1$$

untuk n ganjil:

$$\left(\frac{-5^{2n+1} + 5^n + 5^{2n+2} - 5 + 5^{2n+1} + 5^{n+1} + 5^{n+1} + 5}{6^2 5^n} \right) = \left(\frac{5^n (1 + 5^2 + 5 + 5)}{6^2 5^n} \right) = \frac{36}{36} = 1$$

Selanjutnya untuk entri-entri yang lain berlaku juga cara yang sama.

Kemuudian untuk $i \neq j$ diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$c_{12} = xs + yr + 4(ys) \quad (27)$$

Subtitusikan $x_1 = \frac{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 5}{6} a^n$, $y_1 = \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n$, $x_2 = \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6 \cdot 5^n a^n}$, $y_2 = \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6 \cdot 5^n a^n}$ ke persamaan (27).

Sehingga di dapat:

$$c_{12} = \left(\left(\frac{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 5}{6} a^n \right) \left(\frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6 \cdot 5^n a^n} \right) + \left(\frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \right) \left(\frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6 \cdot 5^n a^n} \right) + 5 \left(\left(\frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6} a^n \right) \left(\frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6 \cdot 5^n a^n} \right) \right)$$

$$c_{12} = \frac{(-1)^{n+1} 5^{2n+5} + 5^n - (-1)^{2n+2} 5^{n+1} - (-1)^{n+1} 5 + (-1)^n 5^{2n+1} + 5^n + (-1)^{2n+1} 5^{n+1} + (-1)^{n+1} 1 + (-1)^{n+1} 4 \cdot 5^{2n} + 4 \cdot 5^n + (-1)^{2n+2} 4 \cdot 5^n + (-1)^{n+1} 4}{6^2 5^n}$$

Jika diberikan n genap maka:

$$\left(\frac{-(5^n 5^n) + 5^n - 5^{n+1} + (5^n 5^n 5) + 5^n - 5^{n+1} - (4 \cdot 5^n 5^n) + 4 \cdot 5^n + 4 \cdot 5^n}{6^2 5^n} \right) = \left(\frac{5^n (-(1 \cdot 1) + 1 - 5 + (1 \cdot 1 \cdot 5) + 1 - 5 - (4 \cdot 1 \cdot 1) + (4 \cdot 1)(4 \cdot 1))}{6^2 5^n} \right) = \frac{0}{36} = 0$$

Untuk n ganjil

$$\left(\frac{(5^n 5^n) + 5^n - 5^{n+1} - (5^n 5^n 5) + 5^n - 5^{n+1} + (4 \cdot 5^n 5^n) + 4 \cdot 5^n + 4 \cdot 5^n}{6^2 5^n} \right) = \left(\frac{5^n ((1 \cdot 1) + 1 - 5 - (1 \cdot 1 \cdot 5) + 1 - 5 + (4 \cdot 1 \cdot 1) + (4 \cdot 1)(4 \cdot 1))}{6^2 5^n} \right) = \frac{0}{36} = 0$$

Berlaku juga cara yang sama untuk mendapatkan entri-entri yang lain. Sehingga jika dituliskan dalam bentuk matriks, maka diperoleh matriks identitas sebagai berikut:

$$A_6^n A_6^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ karena sifat dari perkalian matriks } A^n A^{-n} = A^{-n} A^n,$$

maka berlaku hasil yang sama untuk $A^{-n} A^n = I$. Sehingga teorema 3 terbukti.

Trace Bentuk Umum Matriks Simetris Berbentuk Khusus 6x6 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Akan ditunjukkan bentuk umum dari trace matriks simetris bentuk khusus 6×6

berpangkat bilangan bulat positif dan dibuktikan secara langsung menggunakan definisi

trace matriks

Teorema 4. diberikan matriks simetris berbentuk khusus 6×6 berikut:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ a & 0 & a & a & a & a \\ a & a & 0 & a & a & a \\ a & a & a & 0 & a & a \\ a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & 0 \end{bmatrix} a \in \mathbb{R}, a \neq 0. \text{ Diperoleh } tr(A_6^{-n}) = ((-1)^n 5^{n+1}) 5^{-n} a^{-n}.$$

Bukti:

Akan dibuktikan $tr(A_6^{-n}) = ((-1)^n 5^{n+1}) 5^{-n} a^{-n}$ menggunakan definisi dari *trace* matriks.

Dari teorema 3 diketahui bahwa:

$$A_6^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^{n+1} 5^{n+1}}{6.5^n a^n} & \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$tr(A_6^{-n}) = \left(\frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} \right) + \left(\frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} \right) + \left(\frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} \right) + \left(\frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} \right) + \left(\frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} \right) + \left(\frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6.5^n a^n} \right) = 6 \left(\frac{(-1)^n 5^{n+1} + 1}{6} (5^{-n} a^{-n}) \right) = (-1)^n 5^{n+1} + 1) (5^{-n} a^{-n}). \quad \text{Jadi teorema 4}$$

terbukti.

Aplikasi trace Matriks Simetris berbentuk khusus 6×6 Berpangkat Bilangan Bulat

Pada bagian ini, diberikan beberapa contoh yang berhubungan dengan trace Matriks Simetris berbentuk khusus 6×6 Berpangkat Bilangan Bulat positif dan negatif.

Contoh 1. Diberikan matriks simetris sebagai berikut:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tentukan } A_6^6 \text{ dan } tr(A_6^6)!$$

Penyelesaian:

Dari teorema 1 diperoleh:

$$A_6^{-3} = \begin{bmatrix} -1,9721 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 \\ 0,0006 & -1,9721 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,0006 & -1,9721 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 & -1,9721 & 0,0006 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 & -1,9721 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0006 & -1,9721 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan teorema 4 diperoleh: $tr(A_6^{-3}) = ((-1)^3 5^{3+1}) 5^{-3} a^{-3} = 11,8$.

KESIMPULAN

Matriks pada artikel ini, merupakan matriks simetris berbentuk khusus 6×6 yang entri-entrinya merupakan elemen bilangan real dan dinotasikan dengan A_6^n . Dengan menggunakan matriks simetris berbentuk khusus 6×6 pada Persamaan (1) dan matriks simetris berbentuk khusus 6×6 berpangkat n bilangan bulat positif pada Persamaan (12) dan n bilangan bulat negatif pada persamaan (25), maka diperoleh bentuk umum trace matriks sebagai berikut:

Bentuk umum trace matriks simetris berbentuk khusus 6×6 berpangkat n bilangan bulat positif, yaitu: $tr(A_6^n) = (5^n - (-1)^{n+1} \cdot 5) a^n$ dan bentuk umum trace matriks simetris berbentuk khusus 6×6 berpangkat n bilangan bulat negatif yaitu $tr(A_6^{-n}) = (-1)^n 5^{n+1} + 1) (5^{-n} a^{-n})$.

REFERENSI

- Anton H, Rorres C. Elementary Linier Algebra Versi: Applications Version, 11th Edition. United States of America. 2013.
- Charles E, Robert Jr. Introduction to Mathematical Proofs: A Transition to Advanced Mathematics, 2th Edition. USA. 2015.
- Pahade J, Jha M, Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 matrices. Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory.2015; 5: 150-155.
- Aryani F, Yulianis. Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, Jurnal Sains Matematika dan Statistik.2018; 4(2): 2018.
- Aryani F, Muda Y. Trace Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat. SNTIKI 12. Pekanbaru. 2020: 12
- Aryani F, Muda Y. Trace Matriks Segitiga 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat. SNTIKI 12.

Pekanbaru. 2020: 12

Aryani F, Anam C, Marzuki CC. Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*. 2020: 6(1).

Aryani F, Cenia FB, Muda Y dan Zukrianto. Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus Orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat. *SNTIKI* 10. Pekanbaru. 2020: 10

Aryani F, Hartina, Muda Y dan Zukrianto. Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat. *SNTIKI* 13. Pekanbaru. 2020: 13

Aryani F, Alfianov SP, Marzuki CC, dan Rahma AN. Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat. *SNTIKI* 13. Pekanbaru. 2020: 13

Marzuki CC, Aryani F, dan Rahmawati, Trace Matriks $n \times n$ Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. 2021:7(1)